

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera teoretică, profil umanist**

**IX. OSZTÁLY**

**1.**

a) Igazold, hogy  $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

b) Számítsd ki a következő összeget:

$S = \left[ \sqrt{2 \cdot 5} \right] + \left[ \sqrt{3 \cdot 6} \right] + \dots + \left[ \sqrt{2010 \cdot 2013} \right]$ , ahol  $[x]$  az  $x$  valós szám egész részét jelenti.

**2.** Tekintsük az ABCD konvex négyszöget és az  $M \in (AB)$ ,  $N \in (CD)$  illetve  $P \in (AC)$  pontokat, amelyekre  $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{DN} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}$  és  $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ .

Igazold, hogy ha  $(BC) \parallel (AD)$ , akkor

a)  $(MP) \parallel (BC)$ ;

b) Az  $M$ ,  $N$ ,  $P$  pontok kollineárisak;

c)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BC})$

**3.** Dorut meglátogatták az osztálytársai. Az édesanyja megkérdezte, hogy hány vendég érkezett. Doru azt válaszolta: "Hatnál többen", viszont a mellette lévő nővére azt mondta: "Ötnél többen". Hány osztálytársa látogatta meg Dorut, ha tudjuk, hogy az egyik válasz igaz, a másik pedig nem?

**4.** Egy téglalap alakú telek körbekerítéséhez 120m hosszú kerítést használtak. Mekkora a telek oldalai, ha a telek területe maximális?

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.*

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera teoretică, profil umanist**

**X. OSZTÁLY**

**1.** Adott az  $S_n = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  összeg.

a) Igazold, hogy  $n! \cdot n = (n+1)! - n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , ahol  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

b) Számítsd ki:  $S_n$ -et!

**2.** Egy tanuló május elsején kezdett olvasni egy könyvet. Minden nap ugyanannyi oldalt olvasott a könyvből, és május 31-én befejezte a könyvet. Ha első nap négyszer kevesebb oldalt olvasott volna, a következő napokon pedig az előző napinál eggyel több oldalt, akkor szintén május 31-én fejezte volna be a könyvet. Hány oldalas a könyv?

**3.** Adottak a következő halmazok:

$$A = \{(a, a, a) / a \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{(a, b, c) / a + 2b - 3c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{(a, b, c) / a + 3b - 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Igazold, hogy  $A = B \cap C$ .

**Megj.** Az  $X$  és  $Y$  halmazok akkor és csak akkor egyenlők, ha  $X \subseteq Y$  és  $Y \subseteq X$ .

**4.** Igazold, hogy az alábbi kifejezés nem függ  $x$ -től:

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, x > 0, x \neq 1.$$

**Megjegyzés:** Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera teoretică, profil umanist**

**XI. OSZTÁLY**

**1.** Egy tárgy ára 75% -kal csökkent, majd az új ár kétszer egymás után emelkedett az azonos  $p\%$  százalékkal, így a tárgy ára éppen az eredeti ár lett. Számítsd ki, hogy hány százalékos volt az áremelés!

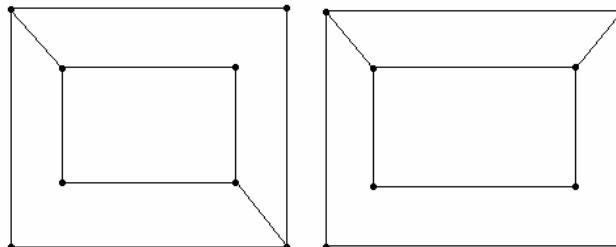
**2.** Az alábbi táblázat, egy iskola tanulóinak a matematika olimpián elért eredményeit tartalmazza.

Pontszám ( $x_i$ )	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Gyakoriság ( $n_i$ )	16	26	35	47	24	13

- Egészítsd ki a táblázatot a felfele halmozott abszolút gyakoriságokkal!
- Számítsd ki a statisztikai sor átlagát!
- Számítsd ki a mediánt és hasonlítsd össze az átlaggal!

**3.**

a) Döntsd el, hogy az alábbi gráfok izomorfok-e vagy sem!



b) Adott az  $n$  csúccsal ( $n \geq 3$ ) és  $m$  éllel rendelkező  $G$  gráf, amelyre  $m > C_{n-1}^2$ . Igazold, hogy  $G$ -nek nincsenek izolált csúcsai!

**4.**

- Rajzolj egy 8 csúcsú 3-ad fokú szabályos gráfot!
- Igazold, hogy egy 3-ad fokú szabályos gráf csúcsainak száma páros!.

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.*

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**  
**Filiera teoretică, profil umanist**

**XII. OSZTÁLY**

**1.** Az  $M_3(\mathbf{R})$  halmazban tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  mátrixot!

a) Igazold, hogy  $A^3 = O_3$  és  $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$ .

b) Számítsd ki:  $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2011A^{2010}$ .

c) Számítsd ki:  $(I_3 + A)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$ .

**2.** Az  $\mathbf{R}$  halmazon értelmezzük az  $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in \mathbf{R}$  műveletet.

a) Igazold, hogy  $(\mathbf{R}, \circ)$  kommutatív csoport!

b) Határozd meg azokat az  $x, y \in \mathbf{R}$  számokat, amelyekre  $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$ .

**3.** Ha az apa 7 évvel idősebb lenne valódi életkoránál, akkor a kisebbik fia jelenlegi életkora az apa életkorának  $\frac{1}{6}$ -a lenne. 15 év múlva a nagyobbik fia életkora az apa életkorának  $\frac{1}{2}$ -e lesz.

Határozd meg mindenikük életkorát, ha 18 év múlva a két fiú életkorának összege egyenlő lesz az apa életkorával!

**4.** Egy vizes medence kiürítésére három csapot használnak. Az alábbi táblázat tartalmazza a csapok működésének időtartamát és az általuk kiürített vízmennyiséget hektoliterben kifejezve. Határozd meg mindegyik csap hl / órában kifejezett hozamát!.

1. csap (órák száma)	2. csap (órák száma)	3. csap (órák száma)	Kiürített vízmennyiség (hl)
2 óra	3 óra	6 óra	220 hl
3 óra	2 óra	6 óra	210 hl
2 óra	2 óra	3 óra	145 hl

*Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.*